第１回 リスナー参加型
天下一学問会

高校レベル
解答解説
物理

作問者：いーんちょ

問題数：大問１問

記述式

解答時間：45 分

物理・解答解説

出題背景

身近にあるストップウォッチ機能のみを用いて地球の大きさが概算できることを主眼に、地球上にある物体に働く力の関係を確認する。

解説

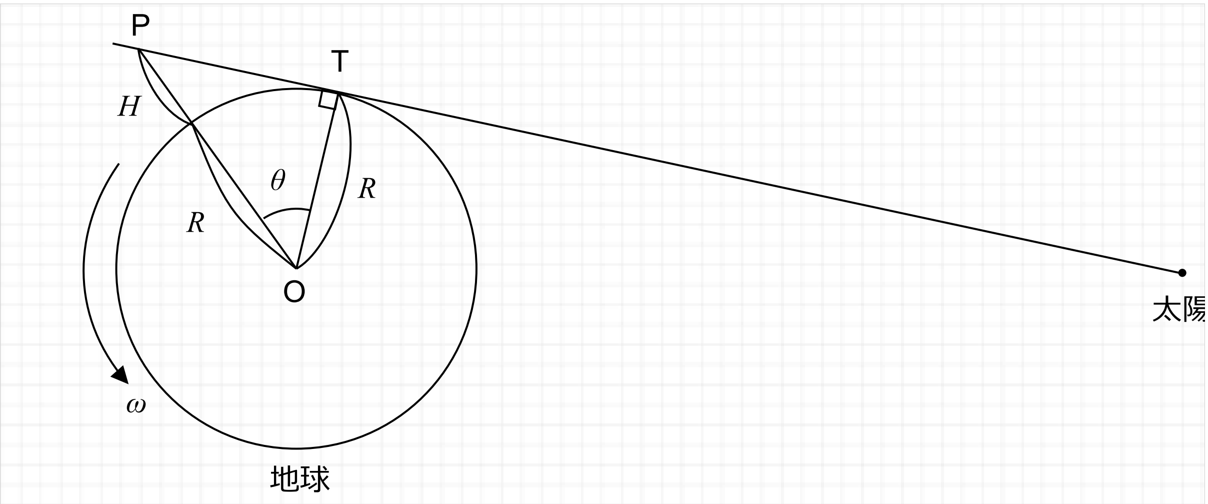
問1.（１０点） $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$ rad/s

自転の角速度は、24時間で地球が1回転360°する、これはすなわち2π[rad]であることから以下のように計算される。

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad} \times 1 \text{ h}}{24 \text{ h} \times 3600 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

問2.（１５点） $R = 6.43 \times 10^{3}$ km

横たわって日が沈んだ瞬間と、立ち上がって再び日が沈んだ瞬間のA君と太陽の位置関係は以下の図のような関係となる。なお地球の中心をO、自転の向きを矢印で表し、また便宜上太陽までの距離は非常に遠いことから点であると見なし、かつ縮尺を誇張した表現にしている。



A君は立ち上がって10.0秒後に再び沈む夕日を見たので図中の角θは、

$$\theta = \omega \times t = \left(7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}\right) \times 10.0 \text{ s} = 7.27 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

である。また上の図から三角形OPTは直角三角形であるため、

$$\cos\theta = \frac{R}{R+H}$$

$$\therefore R = \frac{H\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1.70 \text{ m} \times \cos\left(7.27 \times 10^{-4} \text{ rad}\right)}{1-\cos\left(7.27 \times 10^{-4} \text{ rad}\right)} = 6.43 \times 10^{3} \text{ km}$$

と計算できる。なお実際の地球の半径は赤道において6,378 kmである。

問3.（５点） $F_g = 5.89 \times 10^{2}$ N

A君に働く重力の大きさは素直に$F_g = mg = 60.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 5.89 \times 10^{2}\text{N}$である。

問4.（１５点）$F_C = 1.44\ \mathrm{N}$

遠心力の大きさの計算式は$F_C = mr\omega^2$である。ここでA君は北海道利尻島（北緯45度）にいることから、半径は緯度の余弦の割合で小さくなる。すなわち以下の式で計算される。

$$
\begin{aligned}
F_C &= m\left(R\cos 45^\circ\right)\omega^2 \\
&= 60.0\ \mathrm{kg}\times\left(\left(6.43\times10^3\ \mathrm{km}\times\frac{10^3\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}}\right)\times\cos 45^\circ\right)\times\left(7.27\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}\right)^2 \\
&= 1.44\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

問5.（１０点）④

重力は地球からA君に働く引力と、A君がいる地点においてかかる遠心力のベクトル和となる。図１において、地球からの引力は⑤に相当し、遠心力は③に相当する。したがってこの二つの合力からA君に働く重力の向きは④となる。

問6.（２５点）$F_G = 5.90\times10^2\mathrm{N}$

A君の地面との垂直抗力をF_N（図１中の①に相当する）とする。図１の紙面に対して鉛直と水平方向の力の釣り合いより以下の連立方程式が成り立つ。

$$
\begin{cases}
F_G\cos\theta = F_N\cos(\theta+\alpha) + F_C & \cdots\cdots (1) \\
F_G\sin\theta = F_N\sin(\theta+\alpha) & \cdots\cdots (2)
\end{cases}
$$

ここで、αが十分に小さいことから近似式を利用して、

$$
\begin{cases}
F_G\cos\theta = F_N(\sin\theta + \cos\theta\sin\alpha) + F_C & \cdots\cdots (1)' \\
F_G\sin\theta = F_N(\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha) & \cdots\cdots (2)'
\end{cases}
$$

$(1)' + (2)'$から

$$F_G(\cos\theta+\sin\theta) = F_N(\cos\theta+\sin\theta+\sin\alpha(\cos\theta-\sin\theta)) + F_C$$

ここで$\theta = 45^\circ$かつ$F_N = F_g$であることから、

$$\sqrt{2}F_G = \sqrt{2}F_g + F_C$$

$$\therefore F_G = \frac{2F_g + \sqrt{2}F_C}{2} = 5.90\times10^2\ \mathrm{N}$$

問7.（２０点）$m_E = 6.10\times10^{24}\mathrm{kg}$

万有引力の式から

$$
\begin{aligned}
F_G &= G\frac{m_E\, m}{R^2} \\
m_E &= \frac{F_G R^2}{Gm} \\
&= \frac{\left(5.90\times10^2\ \mathrm{N}\right)\times\left(6.43\times10^6\ \mathrm{m}\right)^2}{\left(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\right)\times60.0\ \mathrm{kg}}
\end{aligned}
$$

$$= 6.10 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

と求められる。なお実際の地球の質量は5.97×10^{24} kgである。