第１回 リスナー参加型

天下一学問会

高校レベル

解答解説

数学（文系）

作問者：いーんちょ

問題数：大問１問

記述式

解答時間：60 分

数学（文系）・解答解説

出題背景

放物線（パラボラアンテナ）の焦点を求める問題である。この内容は理系数学履修者の楕円や双曲線と共に数学IIIで導入される概念だが、実は数学IIまでの知識でもこの点を求めることができる。そこで比較的計算がしやすい具体的な放物線関数の例を元にして焦点を求める。

解説

(1) $f(x)$をxで微分すると$f'(x) = \dfrac{1}{2}x$なので、その値が1となるとき$x = 2$である。このとき$f(2) = 1$となるので、求める点は$P(2, 1)$である。また点Pでの接線の方程式は、

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$$
$$\therefore y = x - 1$$

である。（５点）

(2) 法線は接線に対して垂直となる直線のことである。このとき２直線の傾きの積は-1となる。(1)と合わせて求める法線の傾きは-1になる。したがって求める法線の式は、

$$y - 1 = -(x - 2)$$
$$\therefore y = -x + 3$$

である。（５点）

(3) 点$(a,\ f(a))$での接線の傾きは$\dfrac{a}{2}$である。$a \neq 0$のとき、法線の式は、

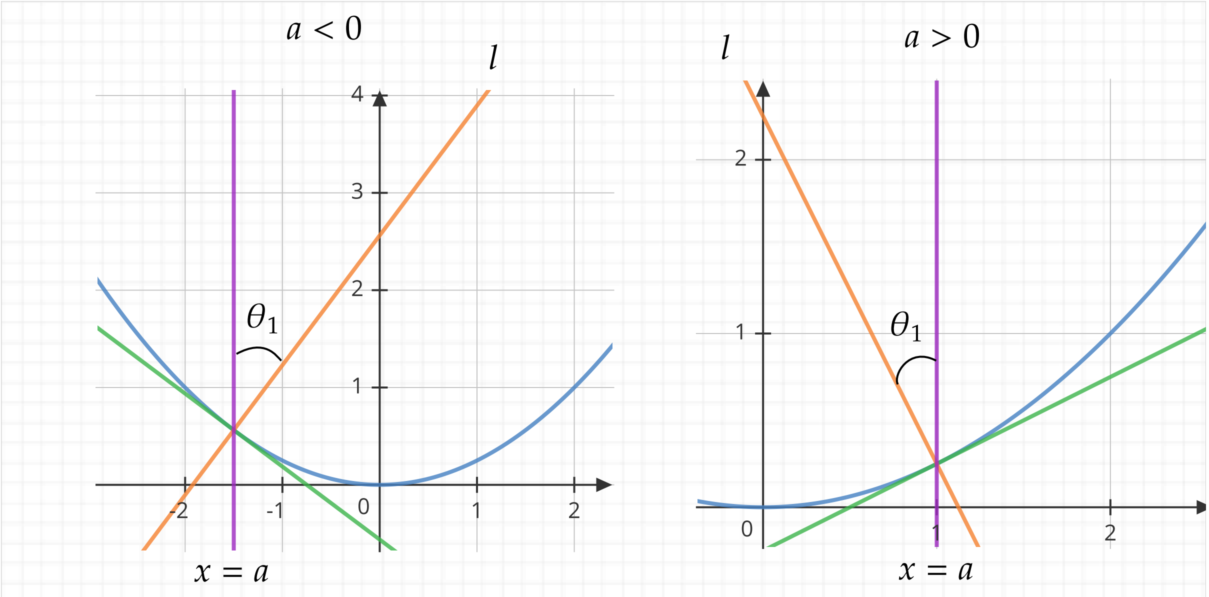
$$y - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{2}{a}(x - a)$$
$$\therefore y = -\frac{2}{a}x + \frac{1}{4}a^2 + 2$$

この式はまた$8x + 4ay - a^3 - 8a = 0$となり、$a = 0$のとき直線$x = 0$となって成立する。

以上より直線lの式は$8x + 4ay - a^3 - 8a = 0$である。（１５点）

(4) 法線lについて、$a = 0$のとき$\theta_1 = 0$である。

$a \neq 0$のとき、法線lの式に$x = 0$を代入して切片を求めると$y = \dfrac{1}{4}a^2 + 2$である。



上の図から$\tan\theta_1$について、以下のように考えることができる。

$$\begin{aligned}\tan\theta_1 &= \frac{(\text{直線}x=a\text{から}y\text{軸までの距離})}{(\text{直線}l\text{の}y\text{切片})\ -\ (\text{交点の}y\text{座標})}\\ &= \frac{|a|}{\left(\frac{1}{4}a^2+2\right)-\frac{1}{4}a^2} = \frac{|a|}{2}\end{aligned}$$

これは$a=0$でも$\theta_1=0$となり成立する。したがって$\tan\theta_1=\dfrac{|a|}{2}$である。（２０点）

(5)A) 加法定理より、

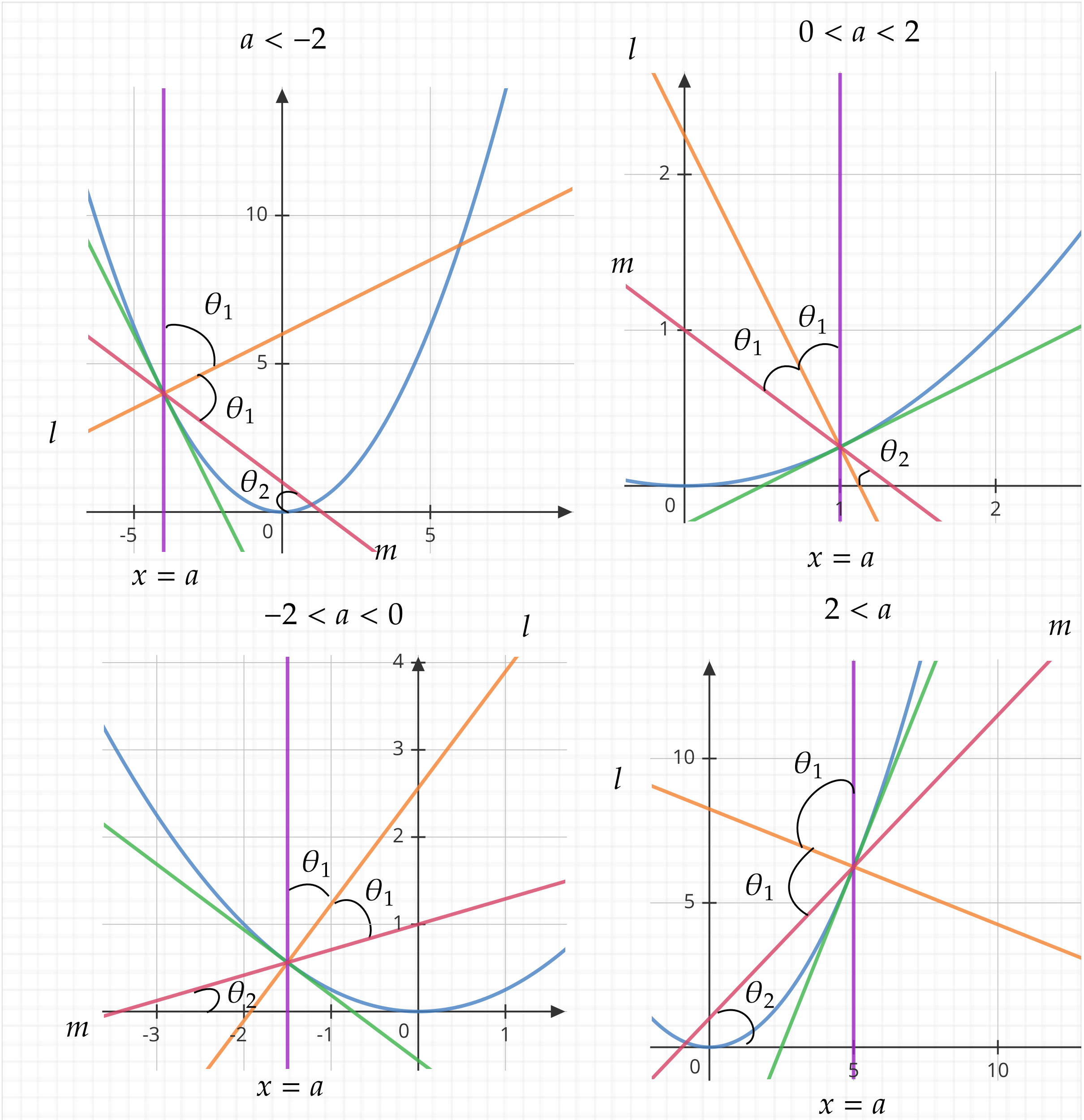
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1}$$

ここで(4)から$\tan\theta_1=\dfrac{|a|}{2}$なので、これを代入して

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\times|a|/2}{1-(|a|/2)^2} = \frac{|a|}{1-a^2/4} = \frac{4|a|}{4-a^2}\ (a\neq\pm 2)$$

である。（１０点）

(5)B) $a\neq\pm2$のとき、それぞれaの値によってθ_2は以下の４通りに場合分けができる。
いずれも三角形の内角の和が$180°$であること、または外角と内角の関係式から計算する。



i) $a <\ -2$のとき、

$$\begin{aligned}
\tan\left(180^\circ - \theta_2\right) &= \tan\left(270^\circ - 2\theta_1\right) \\
&= \tan\left(180^\circ - \left(2\theta_1 - 90^\circ\right)\right) \\
&= -\tan\left(2\theta_1 - 90^\circ\right) \\
&= -\tan\left(-\left(90^\circ - 2\theta_1\right)\right) \\
&= \tan\left(90^\circ - 2\theta_1\right) \\
&= \frac{1}{\tan 2\theta_1} \\
&= \frac{4 - a^2}{4|a|} = -\frac{4 - a^2}{4a}
\end{aligned}$$

ii) $-2 < a < 0$のとき、

$$\begin{aligned}\tan\left(180^\circ - \theta_2\right) &= \tan\left(90^\circ + 2\theta_1\right)\\ &= -\frac{1}{\tan 2\theta_1}\\ &= \frac{4-a^2}{4a}\end{aligned}$$

iii) $0 < a < 2$のとき、

$$\begin{aligned}\tan\left(180^\circ - \theta_2\right) &= \tan\left(180^\circ - \theta_2\right)\\ &= \tan\left(90^\circ + 2\theta_1\right)\\ &= -\frac{4-a^2}{4a}\end{aligned}$$

iv) $2 < a$のとき、

$$\begin{aligned}\tan\left(180^\circ - \theta_2\right) &= \tan\left(270^\circ - 2\theta_1\right)\\ &= \tan\left(180^\circ - \left(2\theta_1 - 90^\circ\right)\right)\\ &= -\tan\left(2\theta_1 - 90^\circ\right)\\ &= -\tan\left(-\left(90^\circ - 2\theta_1\right)\right)\\ &= \tan\left(90^\circ - 2\theta_1\right)\\ &= \frac{1}{\tan 2\theta_1}\\ &= \frac{4-a^2}{4|a|} = \frac{4-a^2}{4a}\end{aligned}$$

以上をまとめて、

$$\tan\left(180^\circ - \theta_2\right) = \begin{cases} -\dfrac{4-a^2}{4a} & (a < \ -2,\ 0 < a < 2) \\ \dfrac{4-a^2}{4a} & (-2 < a < 0,\ 2 < a) \end{cases}$$

となる。（１５点）

(5)C) 上のグラフより、直線mの傾きは以下のようにまとめることができる。

$$\begin{cases} \tan\left(180^\circ - \theta_2\right) = -\dfrac{4-a^2}{4a} & (a < \ -2,\ 0 < a < 2) \\ \tan\theta_2 & (-2 < a < 0,\ 2 < a) \end{cases}$$

ここで$\tan\theta_2\ (-2 < a < 0,\ 2 < a)$を求める必要がある。

i) $-2 < a < 0$のとき、

$$\begin{aligned}\tan\theta_2 &= \tan\left(90^\circ - 2\theta_1\right)\\ &= \frac{1}{\tan 2\theta_1}\\ &= \frac{4-a^2}{4|a|} = -\frac{4-a^2}{4a}\end{aligned}$$

ii) $2 < a$のとき、

$$\begin{aligned}\tan\theta_2 &= \tan\left(2\theta_1 - 90^\circ\right)\\ &= -\frac{1}{\tan 2\theta_1} = -\frac{4-a^2}{4a}\end{aligned}$$

以上より、すべての場合において直線mの傾きは$-\dfrac{4-a^2}{4a}$ $(a \neq 0)$で表される。直線mは放物線の接点を通過するので、その式は、

$$y - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{4-a^2}{4a}(x-a)$$
$$y = -\frac{4-a^2}{4a}x + 1$$
$$\therefore\ 4ay + \left(4-a^2\right)x - 4a = 0$$

である。この式について、$a=0$のとき直線mは直線$x=0$となり成り立つ。また
$a=\pm 2$のとき求める直線の式は$y=1$となるが、これも同様に成り立つ。以上より直線
mの式は、

$$4ay + \left(4-a^2\right)x - 4a = 0$$

である。（１５点）
(6) 直線mはすべての実数aに対して必ずある一点を通ることから、aについての恒等式と見なせる。したがって直線mの式を変形してaに関して降べきの順に整理すると、

$$(-x)a^2 + (4y-4)a + 4x = 0$$

これがすべての実数aに対して成り立つので、

$$\begin{cases}-x = 0\\ 4y - 4 = 0\\ 4x = 0\end{cases}$$

である。これを解くと、$x=0,\ y=1$が求められる。以上より必ず通る点の座標は
$(0,1)$である。（１５点）