

第1回 リスナー参加型 天下一学問会

高校レベル

解答解説

数学（理系）

作問者：いーんちょ

問題数：大問1問

記述式

解答時間：45分

数学（理系）・解答解説

出題背景

虚数解を含む4次方程式の扱い、および複素数平面に解を図示できるかを通じてその理解を確認する。

解説

(1) この4次方程式は $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ の解を持つことから、これを方程式に代入するとド・モアブルの定理より以下のように書ける。

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)^4 + (\cos \theta + i \sin \theta)^2 + a &= \cos 4\theta + i \sin 4\theta + \cos 2\theta + i \sin 2\theta + a \\ &= (\cos 4\theta + \cos 2\theta) + i(\sin 4\theta + \sin 2\theta) + a \\ &= 0\end{aligned}$$

よって実部と虚部を比較することにより、

$$\begin{cases} \cos 4\theta + \cos 2\theta + a = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ \sin 4\theta + \sin 2\theta = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

以上より、 $\sin 4\theta + \sin 2\theta = 0$ が示された。(20点)

(2) (1)より $\sin 4\theta + \sin 2\theta = 0$ なので、

$$\begin{aligned}\sin 4\theta + \sin 2\theta &= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta + \sin 2\theta \\ &= \sin 2\theta(2 \cos 2\theta + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

ここで $0^\circ < \theta < 90^\circ$ から $0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ であるため、 $\sin 2\theta > 0$ である。したがって

$$\begin{aligned}2 \cos 2\theta + 1 &= 0 \\ \cos 2\theta &= -\frac{1}{2} \\ 2\theta &= 120^\circ \\ \therefore \theta &= 60^\circ\end{aligned}$$

(20点)

(3) $\theta = 60^\circ$ より、これを①式に代入して

$$\begin{aligned}\cos 240^\circ + \cos 120^\circ + a &= 0 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

(20点)

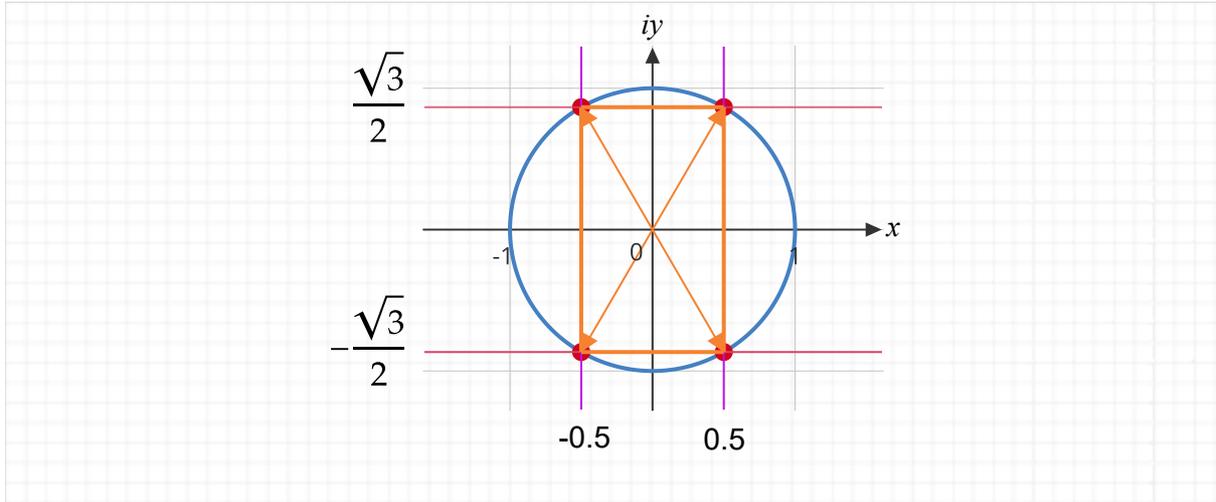
(4) (1)～(3)の結果より、

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(20点)

(5) (4)の結果を複素数平面上に図示すると以下ようになる。ただし赤点は解を表す。またオレンジ線は問題文中で示す各点を結ぶ線分を表す。求める面積は円内にあるオレンジ線で囲まれた部分である。



したがって面積を S で表すと、

$$S = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

である。(20点)