

# 第2回 リスナー参加型 天下一学問会

高校レベル

解答解説

物理①

作問者：いーんちょ

問題数：大問1問

記述式

解答時間：45分

# 物理解答解説

問 1. 力学的エネルギー保存則より、初速  $V_1$  は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MV_1^2 &= MgR \\ V_1 &= \sqrt{2gR}\end{aligned}$$

である。

問 2. 円運動中の小球 A の運動方程式は、半円筒壁からの垂直抗力を  $N$ 、速さを  $V'$  として、

$$M\frac{V'^2}{R} = Mg \cos \theta + N$$

と書ける。角度  $\theta$  で半円筒の壁から離れることから、この位置で垂直抗力  $N = 0$  となる。したがって、 $V_\theta$  は、

$$\begin{aligned}M\frac{V_\theta^2}{R} &= Mg \cos \theta \\ V_\theta &= \sqrt{gR \cos \theta}\end{aligned}$$

である。

またこのときの初速  $V_2$  は、力学的エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MV_2^2 &= MgR(1 + \cos \theta) + \frac{1}{2}MV_\theta^2 \\ V_2^2 &= 2gR(1 + \cos \theta) + V_\theta^2 \\ &= 2gR(1 + \cos \theta) + gR \cos \theta \\ &= gR(2 + 3 \cos \theta) \\ V_2 &= \sqrt{gR(2 + 3 \cos \theta)}\end{aligned}$$

となる。

問 3. 最高点での速さ  $V_H$  は力学的エネルギー保存則より、初速を  $V_3$  として、

$$\frac{1}{2}MV_3^2 = Mg(2R) + \frac{1}{2}MV_H^2 \dots \dots \textcircled{1}$$

また最高点まで小球 A は円運動をすることから、問 2 の結果に  $\theta = 0$  を代入して  $V_H \geq \sqrt{gR} \dots \dots \textcircled{2}$  が必要である。

小球 A が高さ  $2R$  から自由落下するためにかかる時間  $t_1$  は、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{1}{2}gt_1^2 \\ t_1 &= \sqrt{\frac{4R}{g}}\end{aligned}$$

である。小球 A は円筒壁の最高点から水平に速さ  $V_H$  で飛び出すので、小球 A が落下しない水平方向への最大距離  $L$  は、

$$\begin{aligned} L &= V_H t_1 \\ &= \sqrt{gR} \times \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R \end{aligned}$$

である。

問 4. 衝突直後の小球 A、小球 B の速さをそれぞれ  $V'_A, V'_B$  とする。右方向への運動を正としたとき、運動量保存則より、

$$mv = MV'_A - mV'_B \dots\dots\dots ①$$

である。また 2 つの小球は衝突により跳ね返るため、跳ね返り係数の定義から、

$$\begin{aligned} e &= -\frac{V'_B - V'_A}{v - 0} \\ V'_A - V'_B &= ev \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

以上、①、②から、

$$\begin{cases} MV'_A - mV'_B = mv \\ V'_A - V'_B = ev \end{cases}$$

となるので、これを  $V'_A, V'_B$  について解くことにより、

$$\begin{aligned} V'_A &= \frac{(1-e)m}{M-m}v \\ V'_B &= \frac{Me-m}{M-m}v \end{aligned}$$

となる。

問 5. 衝突によって小球 A と小球 B は一体となるので、運動量保存則から一体となった小球の速さ  $v'$  は、

$$\begin{aligned} mv &= (M+m)v' \\ v &= \frac{M+m}{m}v' \end{aligned}$$

である。

ところで問 3 の①と②から、小球が半円筒の壁の最上部まで円運動をするとき、最高点において速さ  $\sqrt{gR}$  となるなので、そのときの小球の初速  $V_4$  は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MV_4^2 &\geq Mg(2R) + \frac{1}{2}V_H^2 \\ V_4^2 &= 4gR + gR = 5gR \\ V_4 &= \sqrt{5gR} \end{aligned}$$

である。この初速であれば、一体となった小球は問3で求めた距離  $L$  の地点に落下する。

以上より、小球 B の初速は、

$$v = \frac{M+m}{m}v' = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gR}$$

である。