

第2回 リスナー参加型 天下一学問会

高校レベル

解答解説

物理②

作問者：いーんちょ

問題数：大問1問

記述式

解答時間：45分

物理②解答解説

問1. 気体の状態方程式において、体積 $V = SL$ 、気体の物質量は $n = 1 \text{ mol}$ なので、

$$P_0 = \frac{RT_0}{V_0} = \frac{RT_0}{SL}$$

である。

問2. 問1と同様にそれぞれの小部屋において気体の状態方程式から、

$$\begin{cases} P_A S(L+x) = RT_1 \\ P_B S(L-x) = RT_0 \end{cases}$$

となる。ここでピストンは釣り合っているので、 $P_A = P_B > 0$ であることから、二つの式の比を取ることでよりピストンの移動距離 x は、

$$\begin{aligned} \frac{L+x}{L-x} &= \frac{T_1}{T_0} \\ \therefore x &= \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} L \end{aligned}$$

となる。

また小部屋Aに対して、ボイル・シャルルの法則より圧力 P_A は、

$$\begin{aligned} \frac{P_0 SL}{T_0} &= \frac{P_A S(L+x)}{T_1} \\ P_A &= \frac{SL}{S(L+x)} \frac{T_1}{T_0} P_0 \\ &= \frac{L}{L+x} \frac{T_1}{T_0} P_0 \\ &= \frac{1}{1 + \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0}} \frac{T_1}{T_0} P_0 \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2T_0} P_0 \\ &= P_B \end{aligned}$$

となる。

問3. 小部屋Aに投入された熱量を Q_A 、ピストンにより気体のした仕事を $W_A > 0$ とすると、熱力学第一法則より内部エネルギー変化 ΔU_A について以下の式が成り立つ。

$$\Delta U_A = Q_A - W_A$$

ここで変化の前後での内部エネルギー変化は、

$$\Delta U_A = C_V(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_0)$$

である。

またピストンがした仕事 W_A は、

$$\begin{aligned} W_A &= P_A V = \frac{T_0 + T_1}{2T_0} P_0 S x \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2T_0} P_0 S \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0} L \\ &= \frac{T_1 - T_0}{2T_0} P_0 S L \\ &= \frac{T_1 - T_0}{2T_0} R T_0 \quad (\because \text{問1の結果から}) \\ &= \frac{T_1 - T_0}{2} R \end{aligned}$$

である。

以上より、小部屋 A に加えられた熱量 Q_A は、

$$Q_A = \Delta U_A + W_A = \frac{3}{2}R(T_1 - T_0) + \frac{T_1 - T_0}{2}R = 2R(T_1 - T_0)$$

である。

同様に温度調節器を通じて小部屋 B から取り除かれた熱量 Q_B を考える。

小部屋 B の温度は変化の前後で T_0 で一定のままなので内部エネルギーの変化はないから $\Delta U_B = 0$ である。

また小部屋 B の気体になされた仕事は $W_B > 0$ は W_A と同じであるため、

$$W_B = \frac{T_1 - T_0}{2} R$$

である。

小部屋 B の気体はピストンから仕事をされたことに注意して、熱力学第一法則より、

$$\Delta U_B = Q_B + W_B$$

が成り立つ。以上より、

$$Q_B = -W_B = -\frac{T_1 - T_0}{2} R$$

Q_B の符号がマイナスなので、これが小部屋 B から取り除かれた熱量である。この絶対値を取ることにより、改めて小部屋 B から取り除かれた熱量 Q_B は、

$$Q_B = \frac{T_1 - T_0}{2} R$$

である。

以上より、求める値 Q_{AB} は、

$$Q_{AB} = Q_A - Q_B = \frac{3(T_1 - T_0)}{2}R$$

である。

問4. ピストンにかかる左右からの力の釣り合いより、

$$P_C S = P_D S + ky$$

である。

問5. 小部屋Bについて、ボイル・シャルルの法則より

$$\begin{aligned}\frac{P_0 S L}{T_0} &= \frac{P_D S (L - y)}{T_0} \\ P_0 L &= P_D L (L - y) \\ P_D &= \frac{L}{L - y} P_0\end{aligned}$$

である。

また問4より、

$$P_C = P_D + \frac{ky}{S} = \frac{L}{L - y} P_0 + \frac{ky}{S}$$

である。

問6. 小部屋Bについてピストンからされた全ての仕事 W'_D は、エネルギー保存則より（気体にされた仕事）と（バネの弾性エネルギー）の和で表されるため、

$$W'_D = P_D V + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{L}{L - y} P_0 S y + \frac{1}{2}ky^2$$

となる。

小部屋Bの温度は一定なので、内部エネルギーは変化しないことから $\Delta U_D = 0$ である。

小部屋Bの熱量 Q_D について熱力学第一法則より $\Delta U_D = Q_D + W_D$ である。

ここで仕事 W'_D のうち $\frac{1}{2}ky^2$ はバネの弾性エネルギーとして系中に蓄えられることから、小部屋Bの気体が受けた正味の仕事 W_D は、 $\frac{L}{L - y} P_0 S y$ である。

以上より小部屋Bの熱量 Q_D について、

$$Q_D = -W_D = -\frac{S L y}{L - y} P_0$$

である。問3と同様に小部屋Bから取り除かれた熱量 $Q_D > 0$ なので改めて絶対値を取ることにより、小部屋Bから取り除かれた熱量 Q_D は、

$$Q_D = \frac{SLy}{L-y}P_0$$

となる。

次に小部屋Aの気体がした仕事 W_C は、 W_D が小部屋Bにされた仕事と同じ値なので $W_C = W_D$ より、

$$W_C = \frac{L}{L-y}P_0Sy + \frac{1}{2}ky^2$$

であり、内部エネルギー変化 ΔU_C は、 $\Delta U_C = \frac{3(T_1 - T_0)}{2}R$ である。

よって、熱力学第一法則 $\Delta U_C = Q_C - W_C$ から、

$$\begin{aligned} Q_C &= \Delta U_C + W_C \\ &= \frac{3(T_1 - T_0)}{2}R + \frac{L}{L-y}P_0Sy + \frac{1}{2}ky^2 \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q_{CD} - \Delta Q_{AB} \\ &= (\Delta Q_C - \Delta Q_D) - \Delta Q_{AB} \\ &= \left(\frac{3(T_1 - T_0)}{2}R + \frac{L}{L-y}P_0Sy + \frac{1}{2}ky^2 - \frac{SLy}{L-y}P_0 \right) - \frac{3(T_1 - T_0)}{2}R \\ &= \frac{1}{2}ky^2 \end{aligned}$$

となる。