第２回 リスナー参加型
天下一学問会

高校レベル
問題用紙
数学（ⅠＡⅡＢ）

作問者：いーんちょ

問題数：大問１問

記述式

解答時間：60 分

数学IAIIB 解答

(1) 平面 P 上にある点 D について、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(2) 点 Q は平面 P 上の点から、問 1 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

である。また $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と平面 P は垂直となるので $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ はそれぞれ互いに直交するので $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であることから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left\{(1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (s + t - 1)|\vec{a}|^2 + s|\vec{b}|^2 = 0 \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left\{(1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\right\}\cdot(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (s + t - 1)|\vec{a}|^2 + t|\vec{c}|^2 = 0 \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1$ より①、②は以下のように書き換えられる。

$$\begin{cases}(s + t - 1) + s = 0 \\ (s + t - 1) + t = 0\end{cases}$$

これを解くと $s = t = \dfrac{1}{3}$ となる。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。

(3) 球 C と平面 P の接点が点 Q である。また球 C の中心を C' とする。このとき、球の中心は直線 l 上にあるので k_1 を実数として、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = k_1\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{k_1}{3}\vec{a} + \frac{k_1}{3}\vec{b} + \frac{k_1}{3}\vec{c}$$

と表すことができる。すると $\overrightarrow{\mathrm{QC'}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{QC'}} = \left(\frac{k_1}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{k_1}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{k_1}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{c}$$

と書ける。ここで球 C の半径が $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であることから、

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{QC'}}\right|^2 &= \left(\frac{k_1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{k_1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{k_1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 3\times\frac{1}{9}(k_1-1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(k_1-1)^2 = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_1-1)^2 &= 4 \\
k_1-1 &= \pm 2
\end{aligned}
$$

これを解くと $k_1=-1,\ 3$ となる。以上より球 C の中心の位置ベクトルについて、

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = -\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \text{ または} \\
&\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}
\end{aligned}
$$

である。

(4) 点 R は直線 l 上の点であることから実数 k_2 を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k_2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{k_2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

と表すことができる。すると $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \left(\frac{k_2}{3}-\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\left(\frac{k_2}{3}-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{k_2}{3}-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$$

と書ける。ここで $\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right| = 2\sqrt{3}$ より (3) と同様にして、

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right|^2 = \frac{1}{3}(k_2-1)^2 &= 12 \\
(k_2-1)^2 &= 36 \\
k_2-1 &= \pm 6
\end{aligned}
$$

となるので $k_2=-5,\ 7$ となる。したがって

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\frac{5}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \text{ または} \\
&\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{7}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})
\end{aligned}
$$

である。

(5) 問題文から $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ と表すとき、球の中心 C' が 2 通りあるため、それぞれの場合について考える必要がある。このとき平面 P に対して実数 $k_1 > 1$ かつ $k_2 > 1$ および $k_1 < 1$ かつ $k_2 < 1$ となる同じ組合せのベクトルが同じ側に属していることに注意する。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{C'S}}$ について、

$$\overrightarrow{\mathrm{C'S}} = (\alpha - 1)\vec{a} + (\beta - 1)\vec{b} + (\gamma - 1)\vec{c}$$

である。同様に $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ について $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{7}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ から、

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \left(\alpha - \frac{7}{3}\right)\vec{a} + \left(\beta - \frac{7}{3}\right)\vec{b} + \left(\gamma - \frac{7}{3}\right)\vec{c}$$

と表すことができる。ここで直線 RS は球 C に対する接線なので、$\overrightarrow{\mathrm{RS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{C'S}}$ であることから、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'S}} &= (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{7}{3}\right) + (\beta - 1)\left(\beta - \frac{7}{3}\right) + (\gamma - 1)\left(\gamma - \frac{7}{3}\right) \\
&= \left(\alpha^2 - \frac{10}{3}\alpha + \frac{7}{3}\right) + \left(\beta^2 - \frac{10}{3}\beta + \frac{7}{3}\right) + \left(\gamma^2 - \frac{10}{3}\gamma + \frac{7}{3}\right) \\
&= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{10}{3}(\alpha + \beta + \gamma) + 7 = 0 \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

である。さらに球 C の半径から $\left|\overrightarrow{\mathrm{C'S}}\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であるため、

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{C'S}}\right| &= (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 1)^2 \\
&= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{5}{3} = 0 \cdots\cdots ④$$

となる。$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ と $(\alpha + \beta + \gamma)$ を一つのブロックと見なして③と④を連立して解くと、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{19}{3} \end{cases}$$

になる。恒等式 $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ が成り立つことから、

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$4^2 = \frac{19}{3} + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{29}{6}$$

となる。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = -\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{C'S}}$ について、

$$\overrightarrow{\mathrm{C'S}} = \left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(\beta+\frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\gamma+\frac{1}{3}\right)\vec{c}$$

である。同様に $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ について $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\dfrac{5}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ から、

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \left(\alpha+\frac{5}{3}\right)\vec{a} + \left(\beta+\frac{5}{3}\right)\vec{b} + \left(\gamma+\frac{5}{3}\right)\vec{c}$$

と表すことができる。ここで直線 RS は球 C に対する接線なので、$\overrightarrow{\mathrm{RS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{C'S}}$ であることから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'S}} &= \left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\left(\alpha+\frac{5}{3}\right) + \left(\beta+\frac{1}{3}\right)\left(\beta+\frac{5}{3}\right) + \left(\gamma+\frac{1}{3}\right)\left(\gamma+\frac{5}{3}\right)\\ &= \left(\alpha^2+2\alpha+\frac{5}{9}\right) + \left(\beta^2+2\beta+\frac{5}{9}\right) + \left(\gamma^2+2\gamma+\frac{5}{9}\right)\\ &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2(\alpha+\beta+\gamma) + \frac{5}{3} = 0 \cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

である。さらに球 C の半径から $\left|\overrightarrow{\mathrm{C'S}}\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ であるため、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{C'S}}\right| &= \left(\alpha+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\beta+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\gamma+\frac{1}{3}\right)^2\\ &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) - 1 = 0 \cdots\cdots ⑥$$

となる。$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ と $(\alpha+\beta+\gamma)$ を一つのブロックと見なして⑤と⑥を連立して解くと、

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = -2\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{7}{3}\end{cases}$$

になる。恒等式 $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ (-2)^2 &= \frac{7}{3} + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{5}{6}$$

となる。