第２回 リスナー参加型

天下一学問会

高校レベル

問題用紙

数学（I A II B III C）

作問者：いーんちょ

問題数：大問１問

記述式

解答時間：60 分

数学IAIIBIIIC 解答

(1) 三平方の定理から、$n+1$ 回目の操作後の一辺の長さは、

$$l_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{3}l_n\right)^2 + \left(\frac{2}{3}l_n\right)^2 = \frac{5}{9}l_n^2$$

である。ここで $l_{n+1} > 0$ であるから、$l_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}l_n$ となる。

これは初項 $l_0 = 1$、公比 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の等比数列なので、

$$l_n = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$$

である。

(2) (1) より $S_n = l_n^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2n} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ である。

これは初項 $S_0 = 1$、公比 $\dfrac{5}{9}$ の無限等比級数の和であるため、

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{4}$$

である。

(3) 点 $A_{n,x}$ を基準として、点 $A_{n+1,x}$ は $A_{n,x} < A_{n+1,x} < B_{n+1,x}$（補足図１）、$B_{n,x} < A_{n+1,x} < A_{n+1,x}$（補足図２）いずれの場合も $A_{n,x}$，$B_{n,x}$ を用いて、

$$\begin{aligned} A_{n+1,x} &= A_{n,x} + \frac{1}{3}\left(B_{n,x} - A_{n,x}\right) \\ &= \frac{2}{3}A_{n,x} + \frac{1}{3}B_{n,x} \end{aligned}$$

と表される。

(4) (3) から同様にして $B_{n+1,x}$，$C_{n+1,x}$，$D_{n+1,x}$ に関する漸化式も同様に立てられることから、

$$A_{n+1,x} + B_{n+1,x} + C_{n+1,x} + D_{n+1,x} = A_{n,x} + B_{n,x} + C_{n,x} + D_{n,x}$$

となる。これより、第 $n+1$ 項目の x 座標の値の総和と第 n 項目の x 座標の値の総和は常に等しくなり、その値は $A_{0,x} + B_{0,x} + C_{0,x} + D_{0,x} = 2$ である。

(5) (3) と同様にして、第 $n+1$ 項目の y 座標の値は以下の漸化式で表される。

$$
\begin{aligned}
A_{n+1,y} &= A_{n,y} + \frac{1}{3}\left(B_{n,y} - A_{n,y}\right) \\
&= \frac{2}{3}A_{n,y} + \frac{1}{3}B_{n,y}
\end{aligned}
$$

したがって、(3)、(4) と同様の手順によって $A_{n,y} + B_{n,y} + C_{n,y} + D_{n,y}$ の値は一定となり、その値は $n = 0$ の場合を考えることにより 2 である。