第２回　リスナー参加型

天下一学問会

高校レベル

問題用紙

数学

（共通テスト方式）

作問者：いーんちょ

問題数：大問２問

マーク式

解答時間：60 分

数学Ⅰ・数学Ａ 解答（配点：３５点）

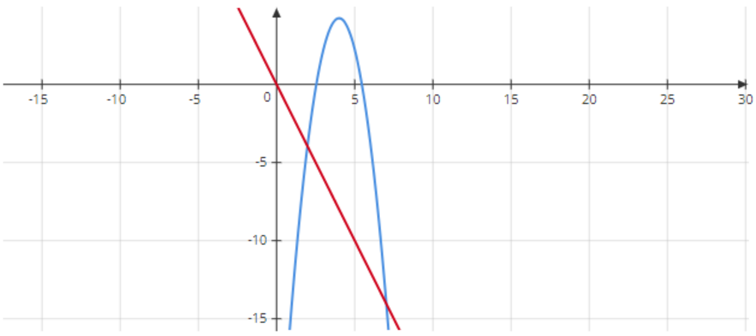
$p = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ より、これを有理化すると $p = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \sqrt{5}+2$（2点）である。$2 < \sqrt{5} < 3$ より $4 < \sqrt{5}+2 < 5$ なので、p の整数部分 a は $a = 4$（2点）である。またこのとき $b = \sqrt{5}-2$ である。

$$\begin{aligned}
a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 &= \left(a^3 - b^3\right) + ab(a-b) \\
&= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) + ab(a-b) \\
&= (a-b)\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \\
&= (a-b)(a+b)^2 \\
&= \left(6-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+2\right)^2 \\
&= \left(6-\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right) \\
&= 34 + 15\sqrt{5} \text{（4点）}
\end{aligned}$$

最高次の係数が -2 である二次関数 $y = f(x)$ は、$x = a$ で最大値 p をとるので、

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2(x-4)^2 + \left(\sqrt{5}+2\right) \\
&= -2\left(x^2 - 8x + 16\right) + \left(\sqrt{5}+2\right) \\
&= -2x^2 + 16x + \sqrt{5} - 30 \text{（5点）}
\end{aligned}$$

となる。この二次関数のグラフを C とすると、C のグラフは以下の図の青線になる。また直線 l は赤線のように表すことができる。



命題「$k < 0$ であるならば、C と直線 l は１つ以上の交点を持つ」は、C のグラフが上に凸（３点）であり、その頂点が第１象限（３点）にあるため必ず l と交点を持つことになり、真（３点）である。また命題「C と直線 l は１つ以上の交点を持つならば、$k < 0$ である」は、$k > 0$ でも交点を持つ場合があるため偽である。以上より、条件 q は条件 r であるための必要条件（５点）である。

ここで $f(a)$ はグラフ C の最大値であることから、①〜③は条件を満たさない。また $f(0) = \sqrt{5} - 30 < 0$ より、選択肢⓪のみが条件を満たす（３点）。頂点が第１象限にあり、$f(0) < 0$ であることを組み合わせることにより、二次方程式 $f(x) = 0$ は異なる二つの正の解を持つ。（選択肢⓪：５点）

数学II・数学B 解答（配点：６５点）

数列 $\{a_n\}$ は初項が 5、公差が 2 の等差数列より、

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + 2(n-1) \\ &= 2n + 3 \text{（３点）} \end{aligned}$$

であり、数列 $\{b_n\}$ は、初項が 2、公比が 3 の等比数列であることから、

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{（３点）}$$

である。（オ：1）またそれぞれの数列の和について、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_n \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= n^2 + 4n \text{（５点）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_n \\ &= \frac{2 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \\ &= 3^n - 1 \text{（５点）} \end{aligned}$$

また数列 $\{c_n\}$ について、

$$\begin{aligned} c_n &= S_n - 12\log_3(T_n + 1) + 12 \\ &= \left(n^2 + 4n\right) - 12\log_3\left(3^n\right) + 12 \\ &= n^2 + 4n - 12n + 12 \\ &= n^2 - 8n + 12 \text{（５点）} \\ &= (n-2)(n-6) \text{（４点）} \end{aligned}$$

と因数分解できる。さらに関数 $f_n(x)$ について、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^2 + \frac{c_{n+1}}{n-5}x + \frac{c_n}{n-6} \\ &= x^2 + \frac{(n-1)(n-5)}{n-5}x + \frac{(n-2)(n-6)}{n-6} \\ &= x^2 + (n-1)x + (n-2) \text{（５点）} \end{aligned}$$

となる。したがって $f_n(x) = 0$ が重解を持つとき、この二次方程式の判別式を D とおくと $D = 0$ となる n を求めればよい。

$$\begin{aligned} D &= (n-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (n-2) \\ &= n^2 - 2n + 1 - 4n + 8 \\ &= n^2 - 6n + 9 \\ &= (n-3)^2 = 0 \text{（４点）} \end{aligned}$$

よって $f_n(x) = 0$ が重解を持つとき、$n = 3$ である。関数 $g_n(x) = a_n x - 2 = (2n+3)x - 2$ より、関数 $h_n(x)$ について、

$$\begin{aligned} h_n(x) &= g_n(x) - f_n(x) \\ &= \{(2n+3)x - 2\} - \{x^2 + (n-1)x + n - 2\} \\ &= -x^2 + (n+2)x - n \text{（５点）} \end{aligned}$$

なので、テ：0、ト：2である。さらに

$$\begin{aligned} h_n(x) &= -x^2 + (n+2)x - n \\ &= -\left(x - \frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{n^2+4}{4} \end{aligned}$$

であることから、$h_n(x)$ は $x = \dfrac{n+2}{2}$（４点）のとき、最大値 $\dfrac{n^2+4}{4}$（５点）をとる。$\alpha = \dfrac{n+2}{2}$ としたときの積分 A_n は、

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\alpha} h_n(x)dx \\ &= \int_2^{\frac{(n+2)}{2}} \left\{-x^2 + (n+2)x - n\right\} dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{n+2}{2}x^2 - nx\right]_0^{\frac{(n+2)}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{2}\right)^3 + \frac{n+2}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 - n\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{n+2}{2}\right)^3 - n\left(\frac{n+2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{n+2}{2}\right)\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 - n\right\} \\ &= \left(\frac{n+2}{2}\right)\left\{\frac{1}{6}\left(n^2 + 4n + 4\right) - n\right\} \\ &= \left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{n^2 - 2n + 4}{6}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left\{\left(n^3 - 2n^2 + 4n\right) + \left(2n^2 - 4n + 8\right)\right\} \\ &= \frac{1}{12}n^3 + \frac{2}{3} \text{（１０点）} \end{aligned}$$

となる。これより $A_3 = \dfrac{1}{12} \times 3^3 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{35}{12}$（７点）である。