第２回　リスナー参加型

天下一学問会

高校レベル

問題用紙

数学（ＩＡⅡＢ）

作問者：いーんちょ

問題数：大問１問

記述式

解答時間：60 分

注意事項

1. 解答提出は専用フォームから行うこと
2. 解答は専用の解答用紙に記入すること
   (ア) 解答欄の不足時は末尾の予備用紙を利用してよい
      ① 元の解答欄に「予備へ続く」など明記すること
      ② 解答する問題番号を明記すること
   (イ) 計算用を含め、予備用紙は 3 枚分用意している
3. 解答は以下の形式のみ受け付ける。
   - PDF（解答用紙へ直接記入または記入した解答を pdf 化）
   - 画像ファイル（png, jpg など　写真を含む）
4. 答案は採点者が読めるよう丁寧に書くこと
5. 解答提出時、ファイルを複数選択して提出可能

次ページより問題を掲載

問題

原点をOとし、長さがいずれも1かつ任意の二つのベクトルが直交する3つの位置ベクトル$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を考え、これらベクトルが作る平面を$P$とする。また原点Oから平面$P$に下ろした垂線を直線$l$とする。

(1) 平面P上の点Dについて、$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を媒介変数$s, t$と$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて表せ。

(2) 平面Pと直線lの交点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。

(3) 直線l上に中心を持ち、平面Pに外接する半径$\frac{2\sqrt{3}}{3}$の球をCとする。球Cの中心について、その位置ベクトルを$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。

(4) 直線l上に点Rを$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \sqrt{3}$となるように取る。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。

(5) 点Rから球C上にある点Sに向かって接線を引く。実数α, β, γを用いて$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$と表したとき、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$が取り得る値を求めよ。