

# 第2回 リスナー参加型

## 天下一学問会

### 高校レベル

### 問題用紙

### 数学 (I A II B III C)

作問者：いーんちょ

問題数：大問1問

記述式

解答時間：60分

## 注意事項

1. 解答提出は専用フォームから行うこと
2. 解答は専用の解答用紙に記入すること  
(ア)解答欄の不足時は末尾の予備用紙を利用してよい
  - ① 元の解答欄に「予備へ続く」など明記すること
  - ② 解答する問題番号を明記すること(イ)計算用を含め、予備用紙は 3.5 枚分用意している
3. 解答は以下の形式のみ受け付ける。
  - PDF (解答用紙へ直接記入または記入した解答を pdf 化)
  - 画像ファイル (png, jpg など 写真を含む)
4. 答案は採点者が読めるよう丁寧に書くこと
5. 解答提出時、ファイルを複数選択して提出可能

次ページより問題を掲載

## 問題

四つの点  $A_0 = (0, 0)$ ,  $B_0 = (1, 0)$ ,  $C_0 = (1, 1)$ ,  $D_0 = (0, 1)$  からなる正方形を考える。線分  $A_0B_0$  上に  $A_0A_1 = \frac{1}{3}A_0B_0$  となる点  $A_1$  をとり、以下同様にして  $B_1, C_1, D_1$  を決め正方形  $A_1B_1C_1D_1$  を作る。以降も同じ操作を繰り返して  $A_kA_{k+1} = \frac{1}{3}A_kB_k$ ,  $B_kB_{k+1} = \frac{1}{3}B_kC_k$ ,  $C_kC_{k+1} = \frac{1}{3}C_kD_k$ ,  $D_kD_{k+1} = \frac{1}{3}D_kA_k$  となる点  $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$  をそれぞれとり、正方形  $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$  を作成する。

- (1) 正方形  $A_nB_nC_nD_n$  の1辺の長さ  $l_n$  を求めよ。
- (2) 正方形  $A_nB_nC_nD_n$  の面積を  $S_n$  とする。  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$  を求めよ。
- (3) 点  $A_n$  の  $x$  座標を  $A_{n,x}$ 、点  $B_n$  の  $x$  座標を  $B_{n,x}$  で表す。点  $A_{n+1}$  の  $x$  座標  $A_{n+1,x}$  を  $A_{n,x}, B_{n,x}$  を用いて表せ。
- (4) 点  $C_n$  の  $x$  座標を  $C_{n,x}$ 、点  $D_n$  の  $x$  座標を  $D_{n,x}$  で表したとき、 $A_{n,x} + B_{n,x} + C_{n,x} + D_{n,x}$  の値は常に一定であることを示せ。
- (5) 点  $A_n$  の  $y$  座標を  $A_{n,y}$ 、点  $B_n$  の  $y$  座標を  $B_{n,y}$ 、点  $C_n$  の  $y$  座標を  $C_{n,y}$ 、点  $D_n$  の  $y$  座標を  $D_{n,y}$  で表したとき、 $A_{n,y} + B_{n,y} + C_{n,y} + D_{n,y}$  の値もまた常に一定であることを示せ。