第２回　リスナー参加型

天下一学問会

高校レベル

問題用紙

数学

（共通テスト方式）

作問者：いーんちょ

問題数：大問２問

マーク式

解答時間：60 分

注意事項

1. 解答は専用フォームから行うこと

次ページより問題を掲載

数学I・数学A

$p = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ とするとき、p を有理化すると $p=\sqrt{5}+\boxed{\text{ア}}$ である。

p の整数部を a、小数部分を b とする。このとき $a=\boxed{\text{イ}}$ であり、

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=\boxed{\text{ウエ}}+\boxed{\text{オカ}}\sqrt{5}$$

である。

次に最高次の係数が -2 である二次関数 $y=f(x)$ は、$x=a$ で最大値 p をとるいう。このような二次関数 $f(x)$ は

$$f(x)=-2x^2+\boxed{\text{キク}}x+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コサ}}$$

である。

この二次関数のグラフを C とし、直線 l を $y=kx$(k は実数) で定める。

C は $\boxed{\text{シ}}$ のグラフであり、その頂点は $\boxed{\text{ス}}$ にある。

$\boxed{\text{シ}}$ の選択肢

⓪ 上に凸
① 下に凸
② 直線

$\boxed{\text{ス}}$ の選択肢

⓪ 第 1 象限
① 第 2 象限
② 第 3 象限
③ 第 4 象限

ここで以下の条件 $q,\ r$ を考える。

$q : C$ と l は 1 つ以上の交点を持つ。
$r : k<0$ である。

命題「$r \Longrightarrow q$」は $\boxed{\text{セ}}$ である。

⓪ 真　① 偽

q は r であるための $\boxed{\text{ソ}}$ である。

⓪ 十分条件
① 必要条件
② 必要十分条件
③ 必要条件でも十分条件でもない

さらに $\boxed{\text{タ}}$ であるため、二次方程式 $f(x)=0$ は $\boxed{\text{チ}}$。

$\boxed{\text{タ}}$ の選択肢

⓪ $f(0)<0$
① $f(a)<f(0)$
② $f(a)<f(2a)$
③ $f(a)<f(-a)$

$\boxed{\text{チ}}$ の選択肢

⓪ 異なる二つの正の解をもつ
① 異なる二つの負の解をもつ
② 正と負の解をそれぞれ一つもつ
③ 重解をもつ
④ 実数解を持たない

(以上で数学I・数学Aは終わりである)

数学II・数学B

数列 $\{a_n\}$ は初項が 5、公差が 2 の等差数列、$\{b_n\}$ は初項が 2、公比が 3 の等比数列であるとき、

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\,n + \boxed{\text{イ}} \qquad b_n = \boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を S_n とし、数列 $\{b_n\}$ の第 n 項までの和を T_n とするとき、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = n^{\boxed{\text{カ}}} + \boxed{\text{キ}}\,n$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_n = \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{ク}}} - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

$\boxed{\text{オ}}$ および $\boxed{\text{ク}}$ の選択肢

⓪ $n-2$
① $n-1$
② n
③ $n+1$
④ $n+2$

ここで新たに数列 $\{c_n\}$ を $c_n = S_n - 12\log_{\boxed{\text{エ}}}(T_n+1) + 12$ で定義する。このとき、

$$c_n = n^{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}}\,n + \boxed{\text{シス}} = (n - \boxed{\text{セ}})(n - \boxed{\text{ソ}})$$

である。ただし $\boxed{\text{セ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ の順序は問わない。

さらに関数 $f_n(x) = x^2 + \dfrac{c_{n+1}}{n-5}x + \dfrac{c_n}{n-6}$ $(n \fallingdotseq 5$ かつ $n \fallingdotseq 6)$ とおく。

$$f_n(x) = x^2 + (n - \boxed{\text{タ}})x + n - \boxed{\text{チ}}$$

である。

したがって $f_n(x) = 0$ が重解をもつとき $n = \boxed{\text{ツ}}$ である。

次に関数 $g_n(x) = a_n x - 2,\ h_n(x) = g_n(x) - f_n(x)$ とおく。

$$h_n(x) = -x^2 + (\boxed{テ})x - (\boxed{ト})$$

である。

$\boxed{テ}$ および $\boxed{ト}$ の選択肢

⓪ $n-2$

① $n-1$

② n

③ $n+1$

④ $n+2$

$h_n(x)$ の最大値は $x = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ナ}}$ のとき $\dfrac{n^{\boxed{ニ}} + \boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である。

$\alpha = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ナ}}$ としたとき、積分 A_n を以下のように定義すると、

$$A_n = \int_0^{\alpha} h_n(x)dx = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハヒ}} n^{\boxed{フ}} + \frac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$$

となる。したがって $A_3 = \dfrac{\boxed{マミ}}{\boxed{ムメ}}$ となる。

(以上で数学 II・数学 B は終わりである)