解答

任意の実数xに対し、定義から$[x]$はすべて自然数となる。また$[\sqrt{n}] = k$となる自然数の範囲は、

$$k \leqq \sqrt{n} < k+1$$

$$k^2 \leqq n < (k+1)^2$$

となる。したがって、整数nがこの区間ではすべてkとなり、その個数は、

$$(k+1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1$$

となる。すなわち、区間$k^2 \leqq n < (k+1)^2$の和は$k(2k+1)$になる。

数値例：

$k = 3$を考えると$9 \leqq n < 16$の範囲では$[\sqrt{n}]$はすべて3になり、この区間にある自然数の個数は$2k + 1 = 7$であるから、総和は$3 \times 7 = 21$になる。

ここで$[\sqrt{2025}] = 45$であることから、求める値は以下のように書くことができる。

$$\sum_{n=1}^{2025} [\sqrt{n}] = \sum_{k=1}^{44} k(2k+1) + 45 = \sum_{k=1}^{44} (2k^2 + k) + 45$$

ここで和の公式から、

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k^2 = 2 \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

であることを使うと、

$$\sum_{k=1}^{44} k = \frac{44 \times 45}{2} = 990$$

$$\sum_{k=1}^{44} 2k^2 = 2 \times \frac{44 \times 45 \times (2 \times 44 + 1)}{6} = 58740$$

となるので求める値は、

$$\sum_{n=1}^{2025}[\sqrt{n}] = 58740 + 990 + 45 = 59775$$

となる。

参考

上記計算をするPythonスクリプトは以下の通り。

```
import math

sum = 0
for i in range(1, 2026):
    sum += math.floor(math.sqrt(i))

print(sum)
```